بسم الله الرحمن الرحیم

آمار فرمی - دیراک

گردآورنده : امیر عباس وجدانی

استاد راهنما : علی رضا حق پیما

سال ۱۳۹۲

آمار فرمی–دیراک :

آمار فرمی–دیراک یا آمار F-D بخشی از علم فیزیک است که به توصیف انرژی ذراتِ تک، در یک سامانه می پردازد، این سامانه شامل تعداد زیادی ذره مشابهِ پیروی کننده از اصل طرد پاولی است. نام فرمی–دیراک پس از انریکو فرمی و پاول دیراک که هر دو به صورت جداگانه و هم‌زمان آن را کشف کرده بودند انتخاب شد.

آمار فرمی–دیراک در سامانه‌ای با تعادل دمایی، بر ذرات مساوی که گردش (اسپین) نیمه‌صحیح دارند اعمال می‌شود. همچنین فرض می‌شود که اندرکنش متقابل ذرات در این سامانه ناچیز است. این باعث می‌شود که بتوان این تعداد زیاد از ذرات را در وضعیت حالت پایه یک تک‌ذره توصیف کرد. نتیجه توزیع فرمی–دیراک بر روی این ذرات یعنی هیچ دو ذره‌ای نمی‌توانند حالت مشابه هم داشته باشند؛ که این نتیجه‌گیری تاثیر بزرگی بر روی ویژگی‌های سامانه دارد. از آنجایی که آمار فرمی–دیراک بر روی ذراتِ با گردش (اسپین) نیمه‌صحیح اعمال می‌شود، باید این ذرات را فرمیون خواند. این آمار بیشتر به الکترون‌هایی که خود فرمیون با گردش ۱/۲ اند اعمال می‌شود. آمار فرمی–دیراک خود زیرمجموعه‌ای از مکانیک آماری است و از اصول مکانیک کوانتوم پیروی می‌کند.

قبل از معرفی آمار فرمی–دیراک در سال ۱۹۲۶ فهم برخی از جنبه‌های رفتار الکترون به دلیل حضور پدیده‌های به ظاهر متناقض بسیار مشکل بود.

توزیع فرمی–دیراک :

در سامانه‌ای با فرمیون‌های مساوی، اگر تعداد متوسط فرمیون‌های با حالت تک‌ذره i در توزیع فرمی–دیراک به شکل زیر بیان می شود:

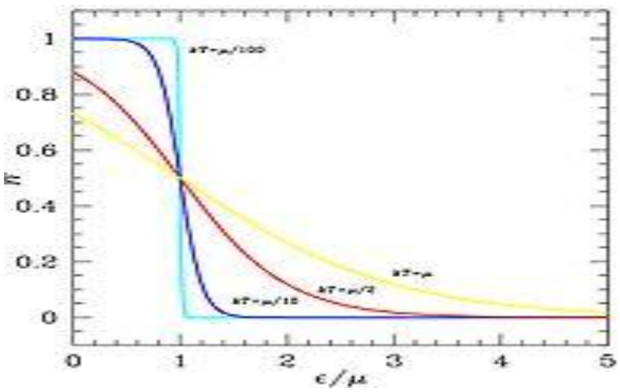
$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{(\epsilon_i-\mu)/kT}+1}$$

که k ثابت بولتزمن است و T دمای مطلق و ϵ_i انرژی یک ذره منفرد در حالت i و μ پتانسیل شیمیایی است. در $T=0$، پتانسیل شیمیایی برابر با انرژی فرمی است. درحالتی که الکترون ها در یک نیمه هادی قرار دارند μ را تراز فرمی می نامیم.

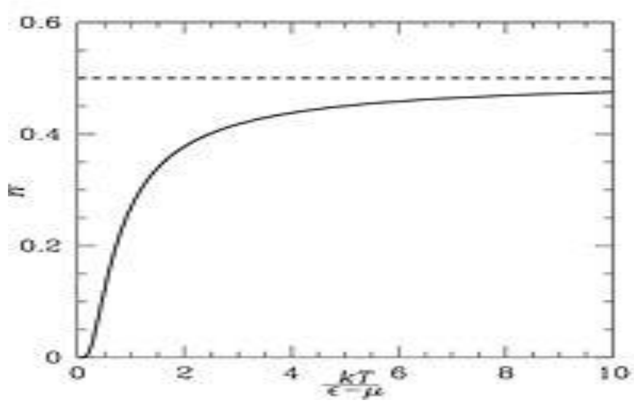
توزیع فرمی–دیراک زمانی جواب درست می دهد که تعداد فرمیون ها آنقدر زیاد باشد که تغییر μ ناشی از اضافه کردن یک فرمیون قابل صرف نظر کردن باشد. از آنجایی که توزیع فرمی–دیراک از اصل طرد پاولی مشتق شده درنتیجه داریم: [1]

$$0 < \bar{n}_i < 1$$

نمودار های فوق درباره ی توزیع فرمی – دیراک می باشد :



وابستگی به انرژی. هرچه T بالاتر باشد، شیب نمودار ملایم تر است. برای $\bar{n}$ =0.5 وقتی ϵ = μ. نشان داده نشده است زیرا μ برای T بالاتر افزایش می‌یابد



وابستگی به دما برای $\epsilon > \mu$.

توزیع ذرات در انرژی :

توزیع فرمی–دیراک که در بالا ارائه شد، توزیع ذرات مشابه فرمیون را در انرژی تک ذره بیان می دارد حالتی که گویی تنها یک فرمیون می تواند آن حالت انرژی را داشته باشد. درنتیجه با استفاده از توزیع فرمی–دیراک می توان توزیع انرژی فرمیونهای مشابه را چنان نشان داد که گویی بیش از یک فرمیون می تواند همان انرژی را داشته باشد.

تعداد متوسط فرمیونها با انرژی ϵ_i را می توان با ضرب $\bar{n}_i$ توزیع فرمی–دیراک در g_i (تعداد حالات با انرژی ϵ_i) بدست آورد:

$$\bar{n}(\epsilon_i) = g_i\ \bar{n}_i = \frac{g_i}{e^{(\epsilon_i-\mu)/kT}+1}$$

وقتی که $g_i \ge 2$ باشد، امکان دارد که $\bar{n}(\epsilon_i) > 1$ زیرا بیش از یک حالت وجود دارد که می تواند توسط فرمیون های با انرژی ϵ_i اشغال شود.

وقتی یک شبه زنجیره انرژی ϵ چگالی حالت $g(\epsilon)$ دارد(به معنی تعداد حالات در یکای محدوده انرژی در یکای حجم). تعداد فرمیونهای متوسط در یکای محدوده انرژی در یکای حجم برابر است با:

$$\bar{N}(\epsilon) = g(\epsilon)\ F(\epsilon)$$

که $F(\epsilon)$ تابع فرمی نام دارد و همان تابعی است که در توزیع فرمی–دیراک $\bar{n}_i$ مورد استفاده قرار می گیرد.

$$F(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT}+1}$$

بنابراین

$$\bar{N}(\epsilon) = \frac{g(\epsilon)}{e^{(\epsilon-\mu)/kT}+1}.$$

کوانتوم و نظام کلاسیک :

آمار ماکسول–بولتزمان به عنوان تقریبی از آمار فرمی–دیراک برای مطالعه سیستم‌های فیزیکی که به اندازه کافی از حد تعیین شده توسط اصل عدم قطعیت هایزنبرگ فاصله دارند بدست می‌آید. شرایط کلاسیک که در آن آمار ماکسول–بولتزمان معتبر است، زمانی محقق می‌شود که فاصله متوسط میان دو ذره $\bar{R}$ ، خیلی بزرگتر از طول موج دو بروی $\bar{\lambda}$ باشد.

$$\bar{R} \gg \bar{\lambda} \approx \frac{h}{\sqrt{3mkT}}$$

در اینجا h ثابت پلانک و m جرم ذره‌است. در مورد الکترون‌های هادی در یک فلز معمولی در دمای *T=300* کلوین (دمای اتاق) سامانه همچنان از نظام کلاسیک دور است زیرا $\bar{R} \approx \bar{\lambda}/25$ است. این مسئله از جرم کوچک الکترون و تمرکز زیاد الکترون‌های هادی ($\bar{R}$) در فلز است. بنابراین آمار فرمی–دیراک برای الکترون‌های هادی نوع فلز مورد نیاز است.

نمونه دیگر از سامانه‌ای که در نظام کلاسیک قرار ندارد، سامانه‌ای است که از الکترون‌های یک ستاره که متلاشی شده و به یک کوتوله سفید تبدیل شده‌است نام برد. هرچند که دما در کوتوله سفید بسیار بالا است (حدود 10،000 کلوین در سطح آن) باز به دلیل تمرکز الکترون هادی در آن و جرم بسیار کوچک الکترون در نظام کلاسیک جای نمی‌گیرد و آمار فرمی–دیراک مورد نیاز است.

FERMI-DIRAC STATISTICS:

In quantum statistics, a branch of physics, **Fermi–Dirac statistics** describes distribution of particles in certain systems comprising many identical particles that obey the Pauli exclusion principle. It is named after Enrico Fermi and Paul Dirac, who each discovered it independently, although Enrico Fermi defined the statistics earlier than Paul Dirac.

Fermi–Dirac (F–D) statistics applies to identical particles with half-integer spin in a system in thermodynamic equilibrium. Additionally, the particles in this system are assumed to have negligible mutual interaction. This allows the many-particle system to be described in terms of single-particle energy states. The result is the F–D distribution of particles over these states and includes the condition that no two particles can occupy the same state, which has a considerable effect on the properties of the system. Since F–D statistics applies to particles with half-integer spin, these particles have come to be called fermions. It is most commonly applied to electrons, which are fermions with spin 1/2. Fermi–Dirac statistics is a part of the more general field of statistical mechanics and uses the principles of quantum mechanics.

HISTORY:

Before the introduction of Fermi–Dirac statistics in 1926, understanding some aspects of electron behavior was difficult due to seemingly contradictory phenomena. For example, the electronic heat capacity of a metal at room temperature seemed to come from 100 times fewer electrons than were in the electric current. It was also difficult to understand why the emission currents, generated by applying high electric fields to metals at room temperature, were almost independent of temperature.

The difficulty encountered by the electronic theory of metals at that time was due to considering that electrons were (according to classical statistics theory) all equivalent. In other words it was believed that each electron contributed to the specific heat an amount on the order of the Boltzmann constant k. This statistical problem remained unsolved until the discovery of F–D statistics.

F–D statistics was first published in 1926 by Enrico Fermi and Paul Dirac. According to an account, Pascual Jordan developed in 1925 the same statistics which he called *Pauli statistics*, but it was not published in a timely manner. According to Dirac, it was first studied by Fermi, and Dirac called it Fermi statistics and the corresponding particles fermions.

F–D statistics was applied in 1926 by Fowler to describe the collapse of a star to a white dwarf. In 1927 Sommerfeld applied it to electrons in metals and in 1928 Fowler and Nordheim applied it to field electron emission from metals. Fermi–Dirac statistics continues to be an important part of physics.

FERMI-DIRAC DISTRIBUTION:

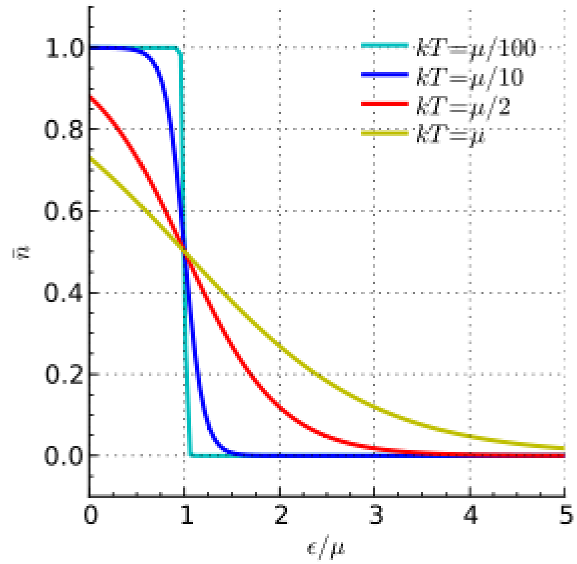
For a system of identical fermions, the average number of fermions in a single-particle state i, is given by the Fermi–Dirac (F–D) distribution,

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)/kT} + 1}$$

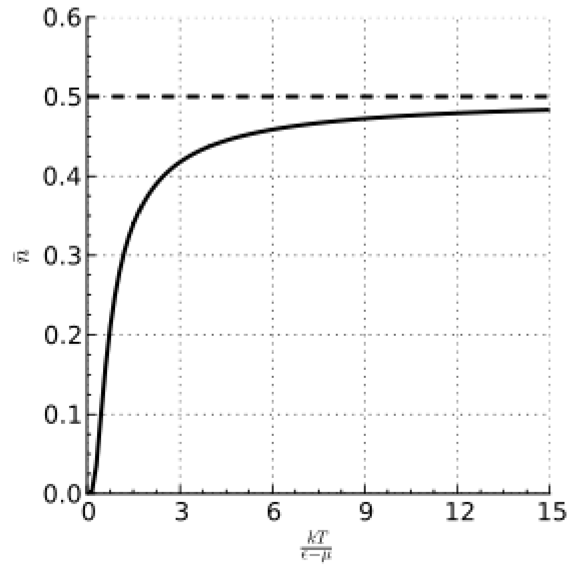
where k is Boltzmann's constant, T is the absolute temperature, ϵ_i is the energy of the single-particle state i, and μ is the total chemical potential. At zero temperature, μ is equal to the Fermi energy plus the potential energy per electron. For the case of electrons in a semiconductor, μ is typically called the Fermi level or electrochemical potential.

The F–D distribution is only valid if the number of fermions in the system is large enough so that adding one more fermion to the system has negligible effect on μ. Since the F–D distribution was derived using the Pauli exclusion principle, which allows at most one electron to occupy each possible state, a result is that $0 < \bar{n}_i < 1$.

- **Fermi–Dirac distribution**

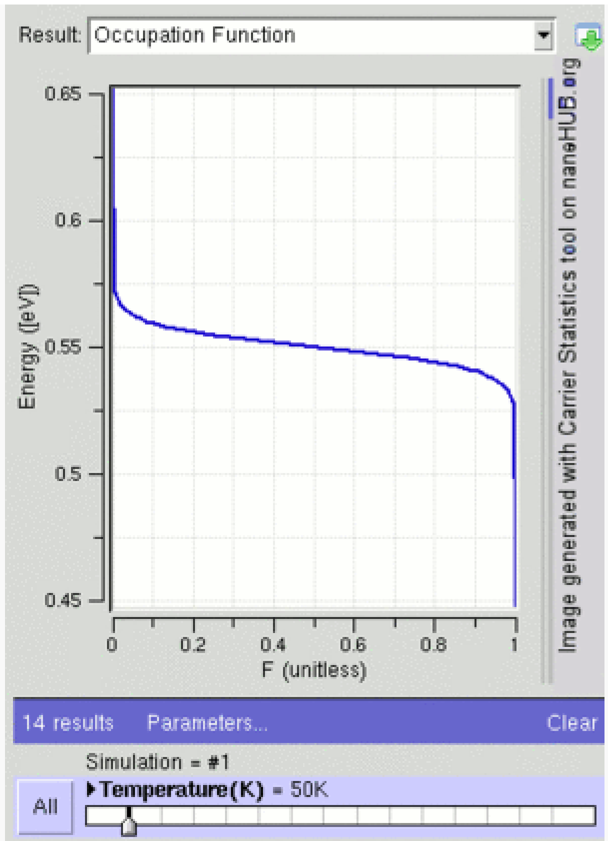
- 

Energy dependence. More gradual at higher *T*. $\bar{n}$ = 0.5 when ϵ = μ. Not shown is that μ decreases for higher *T*.[14]

- 

Temperature dependence for $\epsilon > \mu$.

Distribution of particles over energy



Fermi function F(ϵ) vs. energy ϵ, with μ = 0.55 eV and for various temperatures in the range 50K $\leq$ T $\leq$ 375K.

The above Fermi–Dirac distribution gives the distribution of identical fermions over single-particle energy states, where no more than one fermion can occupy a state. Using the F–D distribution, one can find the distribution of identical fermions over energy, where more than one fermion can have the same energy.

The average number of fermions with energy ϵ_i can be found by multiplying the F–D distribution $\bar{n}_i$ by the degeneracy g_i (i.e. the number of states with energy ϵ_i),

$$\begin{aligned}\bar{n}(\epsilon_i) &= g_i\ \bar{n}_i \\ &= \frac{g_i}{e^{(\epsilon_i-\mu)/kT}+1}\end{aligned}$$

When $g_i \geq 2$, it is possible that $\bar{n}(\epsilon_i) > 1$ since there is more than one state that can be occupied by fermions with the same energy ϵ_i.

When a quasi-continuum of energies ϵ has an associated density of states $g(\epsilon)$ (i.e. the number of states per unit energy range per unit volume) the average number of fermions per unit energy range per unit volume is,

$$\bar{\mathcal{N}}(\epsilon) = g(\epsilon)\ F(\epsilon)$$

Where $F(\epsilon)$ is called the Fermi function and is the same function that is used for the F–D distribution $\bar{n}_i$,

$$F(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT}+1}$$

so that,

$$\bar{\mathcal{N}}(\epsilon) = \frac{g(\epsilon)}{e^{(\epsilon-\mu)/kT}+1}.$$

QUANTUM AND CLASSICAL REGIMES :

The classical regime, where Maxwell–Boltzmann statistics can be used as an approximation to Fermi–Dirac statistics, is found by considering the situation that is far from the limit imposed by the Heisenberg uncertainty principle for a particle's position and momentum. Using this approach, it can be shown that the classical situation occurs if the concentration of particles corresponds to an average interparticle separation $\bar{R}$ that is much greater than the average de Broglie wavelength $\bar{\lambda}$ of the particles,

$$\bar{R} \gg \bar{\lambda} \approx \frac{h}{\sqrt{3mkT}}$$

where h is Planck's constant, and m is the mass of a particle.

For the case of conduction electrons in a typical metal at T = 300K (i.e. approximately room temperature), the system is far from the classical regime because $\bar{R} \approx \bar{\lambda}/25$. This is due to the small mass of the electron and the high concentration (i.e. small $\bar{R}$) of conduction electrons in the metal. Thus Fermi–Dirac statistics is needed for conduction electrons in a typical metal.

Another example of a system that is not in the classical regime is the system that consists of the electrons of a star that has collapsed to a white dwarf.

Although the white dwarf's temperature is high (typically T = 10,000K on its surface), its high electron concentration and the small mass of each electron precludes using a classical approximation, and again Fermi–Dirac statistics is required.